

# 基于广义低秩矩阵分解的分离字典训练及其快速重建算法

张长伦, 余 沾, 王恒友, 何 强

(北京建筑大学理学院, 北京 100044)

**摘 要:** 针对传统压缩感知重建算法存在重建质量偏低、重建时间偏长等问题, 本文提出了一种基于分离字典训练的快速重建算法. 首先选取某类图像作为训练集, 建立其广义低秩矩阵分解模型; 其次采用交替方向乘法求解该模型, 训练出一组分离字典; 最后将该分离字典用于图像重建中, 通过简单的线性运算实现图像的快速重建. 实验结果表明, 本文算法相比于传统的重建算法, 针对训练集同类图像, 具有十分显著的重建性能, 对于其他不同类型的图像, 依然有不错的重建质量, 极大地降低了重建时间.

**关键词:** 压缩感知; 广义低秩矩阵分解; 分离字典训练; 快速重建

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2018)10-2400-10

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.10.013

## Separable Dictionary Training and Its Fast Reconstruction Algorithm Based on Generalized Low-Rank Matrix Approximation

ZHANG Chang-lun, YU Zhan, WANG Heng-you, HE Qiang

(School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China)

**Abstract:** Since traditional compressive sensing reconstruction algorithms have lower reconstruction quality and longer running time, a fast reconstruction algorithm based on separable dictionary training is proposed. Firstly, we choose one class of images as training set and construct their models of generalized low-rank matrix approximation. Then, the alternating direction method is used to solve the model, and we can obtain separable dictionaries. Finally, the separable dictionaries are applied to image reconstruction and realize fast reconstruction of image by simple linear operation. The experimental results show that the proposed algorithm has a better reconstruction performance for training set images compared to traditional reconstruction algorithms. In addition, for other types of images, our algorithm has a good reconstruction quality and a lower reconstruction time.

**Key words:** compressive sensing; generalized low-rank matrix approximation; separable dictionary training; fast reconstruction

### 1 引言

压缩感知 (Compressive Sensing, CS)<sup>[1,2]</sup> 作为信号处理领域中一种全新的理论, 在多个领域中均有广泛的应用. 该理论表明, 当信号稀疏时, 可通过少量测量值精确地重建出原始信号. 压缩感知将信号压缩与采样合二为一<sup>[3]</sup>, 减少了数据在存储、预处理及传输过程中的

能耗. 压缩感知理论自从被提出以来, 受到了众多研究人员的广泛关注.

压缩感知理论研究主要包括三个方面: 信号的稀疏表示、测量矩阵的构造以及重建算法的设计. 信号的稀疏表示是利用满足一定条件的正交基对信号进行稀疏投影, 使投影得到的信号是稀疏的; 测量矩阵要在尽可能降低信号维数的同时保证信息损失最低, 该测量

收稿日期: 2017-05-22; 修回日期: 2018-05-04; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61502024, No. 61473111); 北京市教委科技计划 (No. SQKM201610016009); 北京市属高校基本科研业务费专项 (No. X18086); “建大英才”项目; 北京建筑大学北京未来城市设计高精尖创新中心开放课题 (No. UDC2017033322); 北京建筑大学科研基金 (No. KYJJ2017026)

过程将直接影响测量值所包含的信息量;信号重建算法主要考虑利用维度较小的测量值,尽可能精确及高效地重建出原始高维信号。

重建算法对信号的重建具有十分重要的作用,将直接决定信号的重建质量.信号重建算法研究至今,已取得很重要的进展.一些传统的重建算法,如梯度投影稀疏重建算法<sup>[4]</sup>、正交匹配追踪算法<sup>[5]</sup>和迭代阈值算法<sup>[6]</sup>等,通过多次迭代,能获得不错的重构效果,但是在迭代的同时往往伴随奇异值分解,导致计算复杂度较高. He 等<sup>[7]</sup>指出变换系数中的某些结构能用于提高算法的重建精度,并利用离散余弦变换中的树结构建立了一种分层统计模型,提高了重建质量.为了充分利用信号的非局部相似性,基于非局部相似性的压缩感知算法受到了广泛的关注. Dong 等<sup>[8]</sup>通过结合图像的非局部自相似性及相似图像块的低秩特性,提出了一种基于非局部低秩的压缩感知重建算法. Song 等<sup>[9]</sup>基于图像的非局部相似性,对图像中的相似块进行聚类,将相似块展开为向量,组合成二维矩阵,并以最小重建误差作为约束条件对相似图像块矩阵进行秩最小化求解,最终聚合得到重建图像.这类算法有效提高了重建质量,但是由于分块的原因,将引起不同程度的块效应,重建速度也有待提高.因此,许多学者致力于重建速度的提高,进行了深入的研究. Li 等<sup>[10]</sup>利用线性投影的方式替代了传统重建算法的非线性迭代过程,提出了一种基于最佳线性估计的快速压缩感知图像重建算法,大大缩短了图像重建时间. Chen 等<sup>[11]</sup>提出了一种在测量域直接预测的多假设图像压缩感知重建方法,提高了信号重建的稳定性. Ma 等<sup>[12]</sup>提出了三维环形邻域结构和多群协作机制,设计了一种高效的压缩感知重建方法。

上述传统重建算法已取得重要的进展,但是仍存在不足之处,主要有以下两点:第一,传统的压缩感知主要是基于单字典的重建,常用于一维信号的重建,为了解决实际问题,通常需要将矩阵拉成列向量,进而应用压缩感知重建模型,不仅导致计算复杂度过高,而且破坏了原始信号的二维结构;第二,传统重建算法主要基于最优化的思想实现信号的重建,迭代的同时往往伴随奇异值分解,当处理较大维度的矩阵时,计算复杂度较高。

最近,由于基于样本训练的学习字典具有很好的自适应性,受到了研究人员的高度关注. Aharon 等<sup>[13]</sup>提出了一种基于 K-SVD(Kernel-Singular Value Decomposition)的字典训练方法,通过误差最小原则,对误差项进行奇异值分解,寻找使误差最小的分解项,并以此作为更新的字典原子,经过多次迭代求得最优解.此外,众多学者对分离字典的训练方法展开了深入研究,有效解

决了传统单字典训练方法计算复杂度过高等问题. Hawe 等<sup>[14]</sup>提出了一种分离字典训练方法 SeDiL(Separable Dictionary Learning, SeDiL),利用矩阵流形建立优化模型,并采取几何共轭梯度法对其求解,训练得到一种分离字典,大大提高了字典训练效率. Lu 等<sup>[15]</sup>提出了一种基于分离字典的压缩感知重建算法,通过线性运算将稀疏表示基与测量矩阵有效结合,构造出一种高效的分离字典.该算法仅通过简单的矩阵运算就能实现图像的重建,大大减少了重建时间.对于分离字典构造方法的研究虽然取得了不错的进展,如何设计效率更高的分离字典,依然有待进一步探索。

作为压缩感知从一维到二维的推广,低秩矩阵分解<sup>[16-18]</sup>成为了另一种数据降维的新方法.低秩矩阵分解考虑将含噪的低秩矩阵分解为一个低秩矩阵和一个稀疏误差矩阵,具有十分广泛的应用前景<sup>[19-21]</sup>.传统的低秩矩阵分解方法每次只能处理单个矩阵,在实际应用中,通常面临的是多个矩阵的恢复问题,如:图像集或视频.为了解决这类问题,常采用的方法是将每个矩阵拉成列向量,进而组合成一个大矩阵,再进行低秩分解.这种方式不仅破坏了原始矩阵的二维结构,而且所构造的矩阵维度往往较大,不易于计算和存储. Ye 等<sup>[22]</sup>建立了广义低秩矩阵分解模型(Generalized Low-Rank Approximations of Matrices, GLRAM),能同时处理多个相似矩阵,并将每个矩阵分解为维度更小的矩阵和两个列正交矩阵的乘积,提高了数据处理效率。

然而,由于 GLRAM 使用  $l_2$  范数测量误差,对稀疏大噪声较敏感.针对 GLRAM 存在的问题,本文提出了 IGLRAM(Improved GLRAM, IGLRAM)模型,将  $l_1$  范数加入到 GLRAM 模型中,使得尽可能降低维度的同时保证误差项尽可能小.此外,由于 IGLRAM 训练得到的列正交矩阵与分离字典的作用类似,本文将该列正交矩阵当作分离字典,用于图像重建中,提出一种快速压缩感知重建算法(Fast Compressive Image Sensing Matrix Training, FCISMT).该算法通过线性投影的方式替代了传统重建算法的非线性迭代过程,仅通过简单的矩阵运算就能实现图像的快速近似重建.实验结果表明,针对与训练集同类的图像以及其他不同类别的图像,本文算法的重建速度和重建精度均优于当前主流的压缩感知重建算法。

## 2 理论基础

### 2.1 压缩感知

压缩感知理论表明,稀疏信号可以通过线性投影得到的少量测量值进行重建.该理论的数学模型表示如下:假设信号  $x$  在  $\psi$  域上是  $K$  稀疏的,通过稀疏基  $\psi$  对其进行稀疏表示:

$$x = \Phi\theta \quad (1)$$

其中,  $\theta$  为稀疏系数. 通过所构造的测量矩阵  $\Phi$  ( $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ,  $M < N$ ) 对稀疏信号  $\theta$  进行测量, 得到一个长度为  $M$  的测量值  $y$ :

$$y = \Phi x = \Phi\psi\theta \quad (2)$$

设  $A = \Phi\psi$ , 式(2)可以转化为:

$$y = A\theta \quad (3)$$

由于式(3)是欠定方程, 不能直接利用测量值  $y$  对原始信号  $x$  进行重建. 对于稀疏信号  $\theta$ , 当矩阵  $A$  满足有限等距属性 (Restricted Isometry Property, RIP)<sup>[23]</sup> 时, 通过求解下列优化问题可重建出原始信号  $x$ :

$$\arg \min_{\theta} \|\theta\|_0, \text{ s. t. } y = A\theta \quad (4)$$

由于  $l_0$  范数最小化问题是 NP (non-deterministic polynomial) 难问题, 常常转化为  $l_1$  范数最小化问题进行求解:

$$\arg \min_{\theta} \|\theta\|_1, \text{ s. t. } y = A\theta \quad (5)$$

当  $M$  满足  $M = O(K \log(N/K))$  时,  $K$  稀疏的信号  $\theta$  能通过求解式(5)中的  $l_1$  优化问题高概率重建出来. 最后, 通过式(1)即可得到重建的信号.

## 2.2 GLRAM 模型

所需相关定理<sup>[18,24-28]</sup>如下:

**定理 1** 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , 则  $\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{vec}(B)$ , 其中,  $\text{vec}(\cdot)$  为矩阵的向量化算子,  $\otimes$  表示 Kronecker 积.

**定理 2** 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , 则  $(A \otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+$ , 其中,  $A^+$  表示矩阵  $A$  的广义逆.

**定理 3** 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 且  $r(A) = n$ , 则  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  且  $(A^+)^T = (A^T)^+$ .

**定理 4** 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{q \times l}$ , 则  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ .

**定理 5** 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 则矩阵方程  $AX = B$  有解  $\Leftrightarrow AA^+B = B$ . 且当有解时一个解为  $X = A^+B$ .

**定理 6** 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 则  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$ , 其中,  $\text{trace}(\cdot)$  表示矩阵的迹.

**定理 7** 假设矩阵  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 针对已知的矩阵  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 则下述优化问题

$$\min_x \|\|X\|_1 + \|X - Z\|_F^2/2 \quad (6)$$

有最优解  $X^* = S_{\varepsilon}(Z)$ , 其中,

$$(S_{\varepsilon}(Z))_{ij} = \begin{cases} |Z_{ij}| - \varepsilon, & |Z_{ij}| > \varepsilon \\ 0, & |Z_{ij}| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (7)$$

作为奇异值分解的广义版本, GLRAM 将二维矩阵作为样本值, 并对多个矩阵执行三分解. 即对于给定的  $N$  个二维训练样本  $\{D_i \in \mathbb{R}^{m \times n}\}_{i=1}^N$ , 每个样本值被分解为三个矩阵的乘积的形式:

$$D_i \approx L M_i R^T, i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

其中,  $L \in \mathbb{R}^{m \times r_1}$  和  $R \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$  是列正交矩阵,  $M_i \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2}$ ,  $\max(r_1, r_2) < \min(m, n)$ . GLRAM 的目的是通过寻找合适的  $L, R$  和  $\{M_i\}_{i=1}^N$  使得  $L M_i R^T$  能够近似表示  $D_i$ .

GLRAM 的数学模型可表示为下列最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{L, \{M_i\}_{i=1}^N, R} \{ \sum_{i=1}^N \|D_i - L M_i R^T\|_F^2 \} \\ \text{s. t. } \begin{cases} L^T L = I_{r_1} \\ R^T R = I_{r_2} \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $I_{r_1}$  是  $r_1 \times r_1$  阶单位阵,  $\|\cdot\|_F$  是矩阵的 Frobenius 范数. 在文献[22]中的定理 3.1 已经证明了  $L, R$  和  $\{M_i\}_{i=1}^N$  是式(9)的最优解, 并且  $M_i = L^T D_i R$ .

## 3 本文提出的 IGLRAM 数学模型及其求解

### 3.1 IGLRAM 的数学模型

改写式(8)中的三分解公式:

$$D_i = A_i + E_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

$$\text{s. t. } A_i = L M_i R^T$$

其中,  $E_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是误差矩阵,  $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是  $D_i$  的低秩分解矩阵. 如果  $E_i$  的每一项都服从均值为 0 的独立正态分布, 则它们的最大似然估计与问题(9)等价.

然而, 由于问题(9)中的目标函数对稀疏大噪声较敏感, 而  $l_1$  范数对稀疏大噪声具有很好的鲁棒性. 为了对稀疏大噪声更加鲁棒, 且  $L M_i R^T$  能够尽可能地逼近  $D_i$ , 本文将  $E_i$  的  $l_1$  范数与  $E_i$  的 Frobenius 范数的和作为 IGLRAM 模型的目标函数, 参数  $\lambda$  用于平衡这两项的值, IGLRAM 数学模型表示如下:

$$\begin{aligned} \min_{L, \{M_i\}_{i=1}^N, R, \{E_i\}_{i=1}^N} \{ \sum_{i=1}^N \|E_i\|_F^2 + \lambda \|E_i\|_1 \} \\ \text{s. t. } \begin{cases} L^T L = I_{r_1}, R^T R = I_{r_2} \\ E_i = D_i - L M_i R^T \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

### 3.2 IGLRAM 的求解方法

由于增广拉格朗日乘法<sup>[29]</sup>能将有关约束优化问题转化为无约束优化问题, 下面, 将构建式(11)中优化问题的增广拉格朗日函数.

为了简单描述起见, 令  $M = \{M_i\}_{i=1}^N$ ,  $E = \{E_i\}_{i=1}^N$ . 在不考虑式(11)中的正交约束情况下, 构建其增广拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} f(M, E, L, R, Y) \\ = \sum_{i=1}^N ( \|E_i\|_F^2 + \lambda \|E_i\|_1 + \langle Y_i, D_i - L M_i R^T - E_i \rangle \\ + \mu \|D_i - L M_i R^T - E_i\|_F^2/2) \\ = \sum_{i=1}^N ( \|E_i\|_F^2 + \lambda \|E_i\|_1 \\ + \mu \|D_i - L M_i R^T - E_i\|_F^2/2 \\ + \mu \langle Y_i/\mu, D_i - L M_i R^T - E_i \rangle ) \end{aligned} \quad (12)$$

经过配方:

$$\begin{aligned}
& f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}) \\
&= \sum_{i=1}^N (\| \mathbf{E}_i \|_F^2 + \lambda \| \mathbf{E}_i \|_1 \\
&\quad + \mu \langle \mathbf{Y}_i / \mu, \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i \rangle \\
&\quad + \mu \| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i \|_F^2 / 2 + \mu \| \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 / 2 \\
&\quad - \mu \| \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 / 2) \\
&= \sum_{i=1}^N (\| \mathbf{E}_i \|_F^2 + \lambda \| \mathbf{E}_i \|_1 \\
&\quad + \mu \| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&\quad / 2 - \| \mathbf{Y}_i \|_F^2 / 2\mu)
\end{aligned} \tag{13}$$

其中,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示两个矩阵的内积, 罚因子  $\mu$  为正数,  $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是拉格朗日乘子矩阵, 令  $\mathbf{Y} = \{ \mathbf{Y}_i \}_{i=1}^N$ . 由于求解优化问题 (11) 等价于求解  $\min f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y})$ , 将采用交替方向乘子法<sup>[30]</sup> 对其进行求解. 为了简化求解过程, 让其中一个变量未知, 其他变量固定, 并通过求解  $\min f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y})$  更新该未知变量, 从而将原始的多变量优化问题转化为单变量优化问题. 下面, 将推导每个变量的更新公式.

**更新 L** 如果  $\mathbf{L}$  未知, 其他变量固定, 通过求得  $\min f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y})$  的解更新  $\mathbf{L}$ .

由于

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&= \langle \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T, \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T \rangle - 2 \langle \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T, \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \rangle \\
&\quad + \| \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&= -2 \langle \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T, \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \rangle + \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle \\
&\quad + \| \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2
\end{aligned} \tag{14}$$

根据定理 6, 可得:

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&= -2 \text{trace}(\mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu)^T) \\
&\quad + \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle + \| \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&= -2 \text{trace}(\mathbf{L} ((\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \mathbf{M}_i^T)^T) \\
&\quad + \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle + \| \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&= -2 \langle \mathbf{L}, (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \mathbf{M}_i^T \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle + \| \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2
\end{aligned} \tag{15}$$

结合式 (13) 和 (15):

$$\begin{aligned}
& \arg \min_{\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}_i} f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}) \\
&= \arg \min_{\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}_i} \sum_{i=1}^N \| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&= \arg \min_{\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}_i} \sum_{i=1}^N \{ -2 \langle \mathbf{L}, (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \mathbf{M}_i^T \rangle
\end{aligned}$$

$$+ \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle + \| \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \} \tag{16}$$

由于,  $\langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle$  和  $\| \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2$  对于 (16) 中的优化问题来说为常量, 故:

$$\begin{aligned}
& \arg \min_{\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}_i} f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}) \\
&= \arg \min_{\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}_i} \sum_{i=1}^N \{ -2 \langle \mathbf{L}, (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \mathbf{M}_i^T \rangle \\
&= \arg \max_{\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}_i} \sum_{i=1}^N (\langle \mathbf{L}, (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \mathbf{M}_i^T \rangle) \\
&= \arg \max_{\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}_i} \langle \mathbf{L}, \mathbf{P} \rangle
\end{aligned} \tag{17}$$

其中,  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \mathbf{M}_i^T$ , 这是非常著名的正交普适问题<sup>[31]</sup>. 如果  $\mathbf{Q}_p \mathbf{R}_p$  是矩阵  $\mathbf{P}$  的 QR 分解, 那么该正交普适问题的解为  $\mathbf{L} = \mathbf{Q}_p$ , 其中  $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . 考虑式 (11) 中的正交约束, 可以得到:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q} \mathbf{R}(\mathbf{P}) \tag{18}$$

其中,  $\mathbf{Q} \mathbf{R}(\mathbf{P})$  表示矩阵  $\mathbf{P}$  的 QR 分解, 令  $\mathbf{L}$  取其中正交的矩阵.

**更新 M** 当  $\mathbf{M}_i$  未知, 其他变量固定时,  $\mathbf{M}_i$  的更新公式推导过程如下:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_i = \arg \min_{\mathbf{M}_i} f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}) \\
&= \arg \min_{\mathbf{M}_i} \sum_{i=1}^N (\| \mathbf{E}_i \|_F^2 + \lambda \| \mathbf{E}_i \|_1 \\
&\quad + \mu \| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 / 2 - \| \mathbf{Y}_i \|_F^2 / 2\mu) \\
&= \arg \min_{\mathbf{M}_i} \sum_{i=1}^N (\| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2) \\
&= \arg \min_{\mathbf{M}_i} \sum_{i=1}^N (\langle \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T, \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T \rangle \\
&\quad - 2 \langle \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T, \mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \rangle) \\
&= \arg \min_{\mathbf{M}_i} \sum_{i=1}^N (\langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle - 2 \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{L}^T \\
&\quad \cdot (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \rangle)
\end{aligned} \tag{19}$$

经过配方:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_i = \arg \min_{\mathbf{M}_i} f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}) \\
&= \arg \min_{\mathbf{M}_i} \sum_{i=1}^N (\langle \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i \rangle - 2 \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{L}^T (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i \\
&\quad + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \rangle + \| \mathbf{L}^T (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \|_F^2 \\
&\quad - \| \mathbf{L}^T (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \|_F^2) \\
&= \arg \min_{\mathbf{M}_i} \sum_{i=1}^N (\| \mathbf{M}_i - \mathbf{L}^T (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \|_F^2 \\
&\quad - \| \mathbf{L}^T (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R} \|_F^2) \\
&= \mathbf{L}^T (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{20}$$

**更新 R** 当  $\mathbf{R}$  未知, 其他变量固定时, 由于

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{D}_i - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu \|_F^2 \\
&= \| (\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i / \mu) - \mathbf{L} \mathbf{M}_i \mathbf{R}^T \|_F^2
\end{aligned} \tag{21}$$

则  $\mathbf{R}$  的迭代公式和  $\mathbf{L}$  的迭代公式相似. 令  $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^N ((\mathbf{D}_i - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i/\mu)^\top \mathbf{L} \mathbf{M}_i)$ , 则  $\mathbf{R}$  的更新公式如下

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{R}(\mathbf{W}) \quad (22)$$

其中,  $\mathbf{R}$  取矩阵  $\mathbf{W}$  的 QR 分解中正交的矩阵.

**更新  $\mathbf{E}$**  如果  $\mathbf{E}$  未知, 其他变量已知. 结合定理 7, 推导  $\mathbf{E}_i$  的更新公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}) \\ &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} \sum_{i=1}^N (\|\mathbf{E}_i\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{E}_i\|_1 \\ &\quad + \mu \|\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top - \mathbf{E}_i + \mathbf{Y}_i/\mu\|_F^2/2) \\ &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} \sum_{i=1}^N (\|\mathbf{E}_i\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{E}_i\|_1 \\ &\quad + \mu \|\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu\|_F^2/2 \\ &\quad - \mu \langle \mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu, \mathbf{E}_i \rangle + \mu \|\mathbf{E}_i\|_F^2/2) \\ &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} \sum_{i=1}^N (\|\mathbf{E}_i\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{E}_i\|_1 \\ &\quad - \mu \langle \mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu, \mathbf{E}_i \rangle + \mu \|\mathbf{E}_i\|_F^2/2) \end{aligned} \quad (23)$$

经过合并同类项及配方:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} f(\mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}) \\ &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} \sum_{i=1}^N ((\lambda/(1+\mu/2)) \|\mathbf{E}_i\|_1 + \|\mathbf{E}_i\|_F^2 \\ &\quad - \mu/(1+\mu/2) \cdot \langle \mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu, \mathbf{E}_i \rangle \\ &\quad + (\mu/(2+\mu))^2 \cdot \|\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu\|_F^2 \\ &\quad - (\mu/(2+\mu))^2 \cdot \|\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu\|_F^2) \\ &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} \sum_{i=1}^N \{(\lambda/(1+\mu/2)) \|\mathbf{E}_i\|_1 \\ &\quad + \|\mathbf{E}_i - (\mu/(2+\mu)) \cdot (\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu)\|_F^2 \\ &\quad - (\mu/(2+\mu))^2 \cdot \|\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu\|_F^2\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} \sum_{i=1}^N \{(\lambda/(1+\mu/2)) \|\mathbf{E}_i\|_1 \\ &\quad + \|\mathbf{E}_i - (\mu/(2+\mu)) \cdot (\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu)\|_F^2\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{E}_i} \sum_{i=1}^N \{(\lambda/(2+\mu)) \|\mathbf{E}_i\|_1 \\ &\quad + \|\mathbf{E}_i - (\mu/(2+\mu)) \cdot (\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu)\|_F^2/2\} \end{aligned} \quad (24)$$

根据定理 7:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{S}_{\lambda/(2+\mu)}((\mu/(2+\mu)) \cdot (\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top + \mathbf{Y}_i/\mu)) \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{S}_{1/\mu}(\cdot)$  表示定义在式(7)中的绝对值收缩算子.

**更新  $\mathbf{Y}$**  对于  $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{E}$  给定的情况下, 通过式(26)更新变量  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i + \mu(\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top - \mathbf{E}_i) \quad (26)$$

在算法初始化阶段, 令  $\mathbf{L} = \text{orth}(\text{randn}(m, r_1))$ ,  $\mathbf{R} = \text{orth}(\text{randn}(n, r_2))$ , 其中,  $\text{orth}(\cdot)$  是正交化算子,

$\text{randn}(n, r_2)$  是由标准正态分布生成的  $n \times r_2$  阶随机矩阵, 设  $\mathbf{O}_{m \times n}$  为  $m \times n$  阶零矩阵.

#### 算法 1 IGLRAM 模型的求解算法

输入: 样本矩阵  $\{\mathbf{D}_i\}_{i=1}^N, r_1, r_2$  和  $\lambda$ .

初始化:  $\mathbf{L} = \text{orth}(\text{randn}(m, r_1))$ ,  $\mathbf{R} = \text{orth}(\text{randn}(n, r_2))$ ,  $\mathbf{M}_i = \mathbf{L}\mathbf{D}_i\mathbf{R}^\top$ ,  $\mathbf{E}_i = \mathbf{O}_{m \times n}$ ,  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{O}_{m \times n}$ ,  $\rho = 1.1$ ,  $\mu = 10^{-4}$ ,  $\mu_{\max} = 10^{10}$ ,  $\text{iter} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

while  $\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top - \mathbf{E}_i\|_F^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{D}_i\|_F^2} > \varepsilon$  and  $\text{iter} \leq \text{maxiter}$

do

1. 根据式(18)更新  $\mathbf{L}$
2. 根据式(20)更新  $\mathbf{M}$
3. 根据式(22)更新  $\mathbf{R}$
4. 根据式(20)更新  $\mathbf{M}$
5. 根据式(25)更新  $\mathbf{E}$
6. 根据式(26)更新  $\mathbf{Y}$
7.  $\mu = \min(\rho\mu, \mu_{\max})$
8.  $\text{iter} = \text{iter} + 1$

end while

输出:  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{R}$ .

算法 1 给出了求解问题(11)的算法伪代码, 其中迭代停止条件为迭代次数达到给定次数或者满足:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{D}_i - \mathbf{L}\mathbf{M}_i\mathbf{R}^\top - \mathbf{E}_i\|_F^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{D}_i\|_F^2} \leq \varepsilon \quad (27)$$

其中,  $\varepsilon$  是一个充分小的正数. 为了获得更好的性能,  $\mu$  的值应该在每个迭代过程中随着  $\rho$  的值调整,  $\rho$  的值应该比 1 大<sup>[22]</sup>, 根据经验所知,  $\rho$  的值设为 1.1.

## 4 基于广义低秩矩阵分解的分离字典训练及其快速重建算法

设  $x$  为原始图像,  $\Phi_L$  和  $\Phi_R$  为算法 1 训练出的一组分离字典, 对原始图像  $x$  进行压缩感知:

$$y = \Phi_L^\top \cdot x \cdot \Phi_R \quad (28)$$

其中,  $y$  为测量值, 下面推导原始图像  $x$  的重建公式.

首先, 对等式(28)两边进行列向量化:

$$\text{vec}(y) = \text{vec}(\Phi_L^\top \cdot x \cdot \Phi_R) \quad (29)$$

根据定理 1, 可以得到:

$$\begin{aligned} \text{vec}(y) &= \text{vec}(\Phi_L^\top \cdot x \cdot \Phi_R) \\ &= (\Phi_R^\top \otimes \Phi_L^\top) \text{vec}(x) \end{aligned} \quad (30)$$

其中,  $\otimes$  表示 Kronecker 积. 根据定理 2 和 3:

$$\begin{aligned} (\Phi_R^\top \otimes \Phi_L^\top)^+ &= (\Phi_R^\top)^+ \otimes (\Phi_L^\top)^+ \\ &= (\Phi_R^+)^T \otimes (\Phi_L^+)^T \\ &= ((\Phi_R^\top \Phi_R)^{-1} \Phi_R^\top)^T \\ &\quad \otimes ((\Phi_L^\top \Phi_L)^{-1} \Phi_L^\top)^T \end{aligned} \quad (31)$$

由于 $\Phi_L$ 和 $\Phi_R$ 是列正交向量,故 $\Phi_R^T \Phi_R = I$ , $\Phi_L^T \Phi_L = I$ ,其中 $I$ 是单位向量,等式(31)化简为:

$$\begin{aligned} (\Phi_R^T \otimes \Phi_L^T)^+ &= ((\Phi_R^T \Phi_R)^{-1} \Phi_R^T)^T \\ &\quad \otimes ((\Phi_L^T \Phi_L)^{-1} \Phi_L^T)^T \\ &= \Phi_R \otimes \Phi_L \end{aligned} \quad (32)$$

其次,由于

$$\begin{aligned} (\Phi_R^T \otimes \Phi_L^T) \cdot (\Phi_R \otimes \Phi_L)^+ &= (\Phi_R^T \otimes \Phi_L^T) \cdot (\Phi_R \otimes \Phi_L) \\ &= (\Phi_R^T \cdot \Phi_R) \otimes (\Phi_L^T \cdot \Phi_L) \\ &= I \end{aligned} \quad (33)$$

并且根据定理 5,  $(\Phi_R^T \otimes \Phi_L^T) \cdot (\Phi_R \otimes \Phi_L)^+ \cdot \text{vec}(y) = \text{vec}(y)$ , 因此方程(30)有解. 本文算法目的在于快速近似重构,故舍弃求其最优解,由定理 5 可知, $X = (\Phi_R \otimes \Phi_L)^+ \text{vec}(y)$ 为方程(30)中的一个解,即:

$$\begin{aligned} X &= (\Phi_R \otimes \Phi_L)^+ \text{vec}(y) \\ &= (\Phi_R \otimes \Phi_L) \text{vec}(y) \\ &= \text{vec}(\Phi_L \cdot y \cdot \Phi_R^T) \end{aligned} \quad (34)$$

因此,原始图像 $x$ 的重建公式为

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \text{vec}^{-1}(X) \\ &= \text{vec}^{-1}(\text{vec}(\Phi_L \cdot y \cdot \Phi_R^T)) \\ &= \Phi_L \cdot y \cdot \Phi_R^T \end{aligned} \quad (35)$$

其中, $\text{vec}^{-1}(\cdot)$ 为逆向量化算子.

## 5 实验结果与分析

为了验证本文算法的有效性,将与一些经典的算法进行对比,其中包括 TSBS-VB<sup>[7]</sup>, MH<sup>[11]</sup>, s-HM<sup>[32]</sup>, TVAL3<sup>[33]</sup>. 由于对比算法均涉及多个参数,我们将按照相应论文中作者所给出的最佳参数值进行测试. 本节实验采用 Yale 人脸库作为训练集,并选取两组测试图进行测试,一组为 Yale 人脸库中 6 副人脸图,用于验证算法的针对性;另一组为测试图像库中 6 副不同属性的测试图,用于验证算法的普适性. 两组测试图分别为图 1 和图 2,均是大小为  $100 \times 100$  的灰度图像.

实验中,误差参数 $\varepsilon$ 设为 $10^{-7}$ ,最大迭代次数 $\text{maxiter}$ 设为 1000,  $\lambda = 1/\sqrt{\max(m,n)}$ <sup>[34]</sup>. 在文献[22]中指出当 $r_1 = r_2$ 时,矩阵低秩分解的性能最优,令 $r_1 = r_2 = \sqrt{m \cdot n \cdot p}$ ,其中 $p$ 为采样率. 采样率分别取 0.1, 0.2, 0.3 和 0.4 作为测试. 仿真实验均在 MATLAB-2010a 软件中完成,硬件环境为酷睿 i5-3470 CPU、8GB RAM 以及 64 位 Windows 7 旗舰版 OS 的个人电脑. 采用峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)衡量算法的重建效果,表 1 为各算法针对第一组测试图像的重建质量.



图1 Yale图像库中的实验测试图像

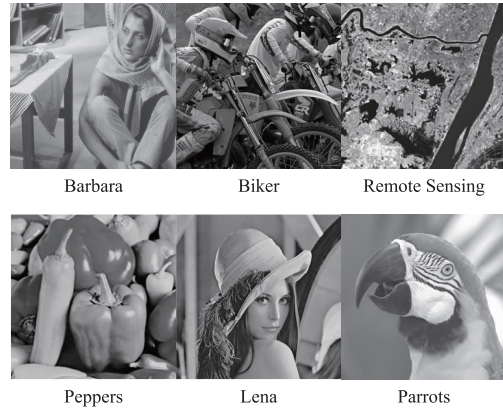


图2 测试图像库中的实验测试图像

表 1 各种算法重建 Yale 人脸库图像的 PSNR 值(单位: dB)

| 图像      | S2           |              |              |              | S5           |              |              |              |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|         | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| 采样率     | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| s-HM    | 25.09        | 32.02        | 35.54        | 38.20        | 26.33        | 32.65        | 36.74        | 39.74        |
| MH      | 31.79        | 36.49        | 38.67        | 41.30        | 33.73        | 37.51        | 40.42        | 42.73        |
| TSBS-VB | 24.23        | 29.30        | 33.26        | 36.55        | 24.13        | 30.38        | 34.90        | 38.31        |
| TVAL3   | 23.86        | 28.24        | 31.24        | 33.75        | 24.55        | 29.24        | 31.97        | 34.23        |
| FCISMT  | <b>34.20</b> | <b>40.22</b> | <b>44.35</b> | <b>47.59</b> | <b>35.82</b> | <b>41.73</b> | <b>45.85</b> | <b>48.64</b> |
| 图像      | S8           |              |              |              | S10          |              |              |              |
| 采样率     | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| s-HM    | 25.80        | 31.70        | 36.13        | 39.17        | 26.55        | 32.47        | 36.84        | 39.71        |
| MH      | 32.93        | 38.06        | 40.57        | 42.93        | 34.14        | 39.08        | 41.28        | 43.57        |
| TSBS-VB | 24.12        | 30.00        | 34.35        | 38.11        | 24.97        | 30.47        | 34.74        | 38.26        |
| TVAL3   | 24.53        | 28.19        | 31.03        | 33.64        | 24.73        | 28.93        | 31.57        | 34.37        |
| FCISMT  | <b>36.05</b> | <b>42.26</b> | <b>46.50</b> | <b>49.13</b> | <b>35.95</b> | <b>42.15</b> | <b>46.46</b> | <b>48.89</b> |
| 图像      | S30          |              |              |              | S38          |              |              |              |
| 采样率     | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| s-HM    | 26.85        | 33.36        | 37.54        | 40.85        | 27.80        | 33.37        | 37.44        | 40.48        |
| MH      | 34.58        | 39.34        | 42.50        | 44.81        | 33.47        | 38.25        | 40.90        | 43.00        |
| TSBS-VB | 25.49        | 31.80        | 35.98        | 40.51        | 26.21        | 31.66        | 36.49        | 40.21        |
| TVAL3   | 25.77        | 30.18        | 32.84        | 35.41        | 26.91        | 31.05        | 33.78        | 36.14        |
| FCISMT  | <b>37.22</b> | <b>44.34</b> | <b>48.89</b> | <b>50.91</b> | <b>36.63</b> | <b>42.98</b> | <b>46.83</b> | <b>49.88</b> |

从表 1 中,可以看出,针对 Yale 人脸库图像的重建,本文提出的 FCISMT 算法具有十分明显的优势,相比于重建效果较好的 MH 算法,PSNR 值提升约 4 dB,相比于其他算法,PSNR 提升 9 dB ~ 13 dB. 说明本文算法针对一类图像的重建具有较好的效果.

接下来,将更加直观地比较各算法的重建效果,图 3 给出了采样率为 0.3 时 S38 的重建图像. 从图 3 可以看出,FCISMT 算法的重建图像轮廓分明,边缘细节清晰可见,重建质量优于其余算法. 为了进一步验证本文算法的优越性,图 4 给出了各种算法对 Yale 库中 6 副所选图像在不同采样率下的重建图像 PSNR 平均值对比. 从图 4 中可以看出,本文算法在不同采样率下的平均 PSNR 值均最高,即使在低采样率下,仍然具有不错的重建质量.

下面将对各算法的重建时间,表 2 给出了不同算法针对 s38 图像在不同采样率下的重建时间. 如表 2 所示,本文算法的重建时间远低于其他算法,平均时间仅为 0.03s,时间复杂度明显降低.

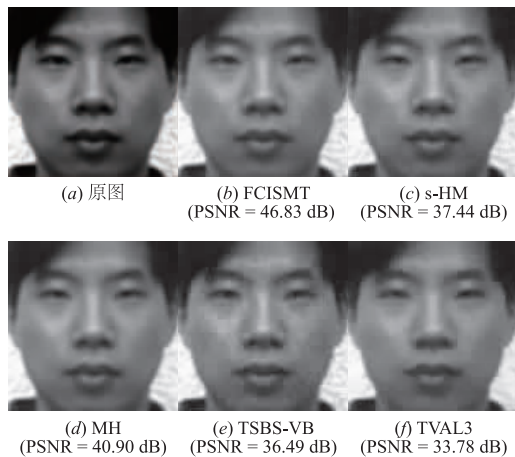


图3 采样率为0.3时S38图像的重建效果对比

表2 各算法对 S38 图像重建时间对比(单位:s)

| 重建算法    | 采样率         |             |             |             | 平均时间        |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|         | 0.1         | 0.2         | 0.3         | 0.4         |             |
| s-HM    | 37.62       | 45.53       | 73.60       | 95.06       | 62.95       |
| MH      | 2.31        | 4.61        | 2.19        | 3.23        | 3.09        |
| TSBS-VB | 13.12       | 14.56       | 21.73       | 26.14       | 18.89       |
| TVAL3   | 3.69        | 4.32        | 5.05        | 6.46        | 4.88        |
| FCISMT  | <b>0.03</b> | <b>0.02</b> | <b>0.03</b> | <b>0.04</b> | <b>0.03</b> |

各种算法针对第二组测试图像的重建效果如表 3 所示,从表 3 中可以得到,针对不同属性的图像,所提出的 FCISMT 算法大部分情况下均取得了较好的效果,相比其他算法 PSNR 值平均提高了约 3 dB,即使对于存在丰富的相似纹理信息的 Barbara 图像,依然取得了很好

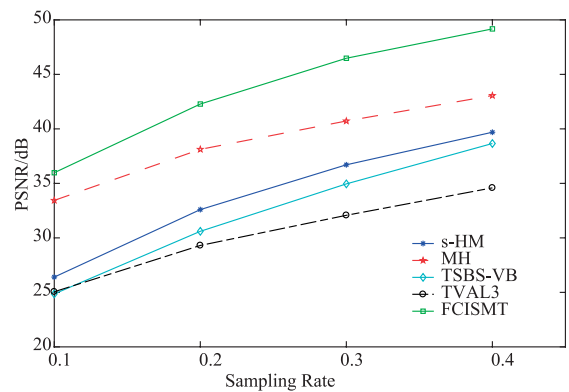


图4 不同采样率下Yale库重建图像的平均PSNR对比

的重建效果. 此外,对于 Lena 图像,FCISMT 算法相比于其他算法,PSNR 大约提升了 3 dB. 对于 Remote Sensing 图像,FCISMT 算法的 PSNR 大约提升了 4 dB. 对于纹理结构不复杂的 Peppers 和 Biker 图像,本文算法仍然优于其余算法. 针于 Parrots 图像,在低采样率下,本文算法的重建效果更为突出,随着采样率的增加,本文算法的重建效果差于 TVAL3. 总的来说,本文算法的重建效果优于 s-HM, MH, TSBS-VB 以及 TVAL3.

表3 各种算法重建测试库图像的 PSNR 值(单位:dB)

| 图像      | Barbara        |              |              |              | Biker        |              |              |              |
|---------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|         | 0.1            | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| 采样率     | 0.1            | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| s-HM    | 20.50          | 22.61        | 24.86        | 27.09        | 16.98        | 18.43        | 20.26        | 21.57        |
| MH      | 22.77          | 25.91        | 28.40        | 30.72        | 19.04        | 21.22        | 22.39        | 24.22        |
| TSBS-VB | 18.86          | 21.59        | 23.85        | 25.79        | 16.33        | 17.87        | 19.13        | 20.15        |
| TVAL3   | 20.60          | 23.56        | 26.08        | 28.71        | 18.26        | 20.27        | 22.07        | 23.66        |
| FCISMT  | <b>23.85</b>   | <b>27.11</b> | <b>29.21</b> | <b>31.10</b> | <b>20.84</b> | <b>23.16</b> | <b>25.02</b> | <b>26.51</b> |
| 图像      | Remote Sensing |              |              |              | Peppers      |              |              |              |
| 采样率     | 0.1            | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| s-HM    | 16.60          | 17.66        | 19.09        | 20.46        | 19.88        | 22.84        | 25.72        | 27.75        |
| MH      | 18.00          | 19.94        | 21.23        | 22.62        | 22.44        | 26.25        | 27.98        | 30.53        |
| TSBS-VB | 16.42          | 17.16        | 18.55        | 19.00        | 18.75        | 21.72        | 23.82        | 26.40        |
| TVAL3   | 17.98          | 19.39        | 21.04        | 22.53        | 20.99        | 24.14        | 27.60        | 30.33        |
| FCISMT  | <b>20.17</b>   | <b>22.31</b> | <b>23.83</b> | <b>25.46</b> | <b>24.09</b> | <b>27.22</b> | <b>29.58</b> | <b>31.61</b> |
| 图像      | Lena           |              |              |              | Parrots      |              |              |              |
| 采样率     | 0.1            | 0.2          | 0.3          | 0.4          | 0.1          | 0.2          | 0.3          | 0.4          |
| s-HM    | 20.80          | 23.59        | 25.99        | 28.15        | 21.38        | 24.51        | 27.56        | 30.59        |
| MH      | 23.26          | 26.67        | 28.80        | 30.82        | 23.32        | 25.07        | 27.28        | 29.45        |
| TSBS-VB | 19.25          | 22.44        | 24.42        | 26.94        | 20.98        | 24.09        | 26.49        | 29.55        |
| TVAL3   | 21.74          | 25.19        | 27.58        | 30.49        | 23.12        | 26.21        | 29.10        | 31.89        |
| FCISMT  | <b>24.64</b>   | <b>27.58</b> | <b>29.58</b> | <b>31.11</b> | <b>24.40</b> | <b>26.22</b> | <b>27.99</b> | <b>29.87</b> |

为了从视觉上比较各算法的重建效果,图 5 给出了 Lena 图像在采样率为 0.3 时的重建图像,图 6 给出了 Biker 图像在采样率为 0.2 时的重建图像,图 7 给出了 Remote Sensing 图像在采样率为 0.1 时的重建图像.从图 5、图 6 和图 7 中可以看出,针对不同的图像,在不同的采样率下,MH 和 TVAL3 的重建质量均比 TSBS-VB 及 s-HM 好,但重建出的图像仍有不同程度的损坏,而 FCISMT 算法重建出的图像具有更加清晰的边缘和精细的细节.尤其在采样率偏低的情况下,本文算法重建图像的轮廓仍清晰可见.

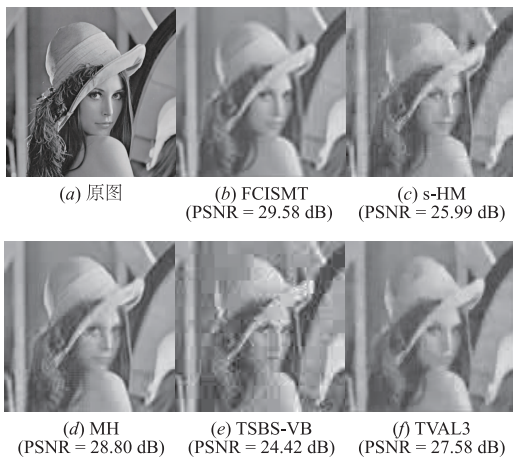


图5 采样率为0.3时Lena图像的重建效果对比

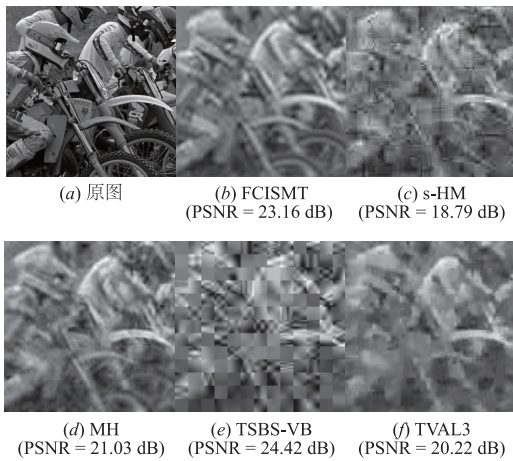


图6 采样率为0.2时Biker图像的重建效果对比

接下来,将进一步验证本文算法的优越性.图 8 给出了各种算法对测试库中 6 副所选图在不同采样率下重建图像的 PSNR 平均值对比.从图 8 中可以看出,随着采样率的增加,本文算法的平均 PSNR 值始终高于其他算法,平均提高约 2.96 dB.

为了对比各算法的重建速度,表 4 给出了各种算法针对 Lena 图像在不同采样率下的重建时间.从表 4 中

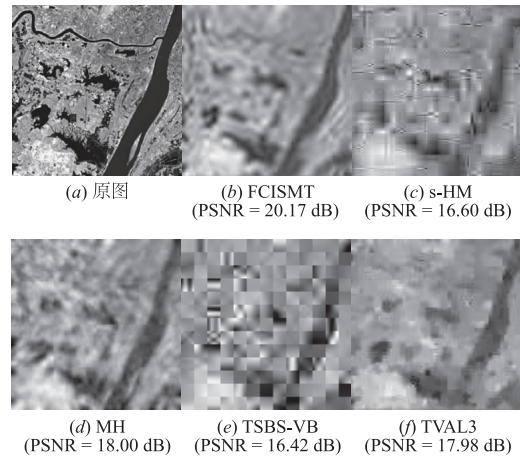


图7 采样率为0.1时Remote Sensing图像的重建效果对比

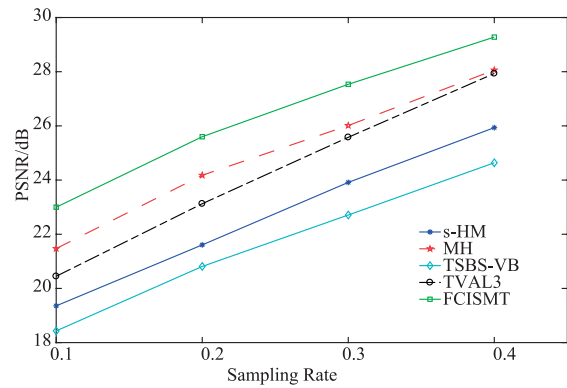


图8 不同采样率下测试库重建图像的平均PSNR对比

可以看出,FCISMT 算法的重建时间远低于其他算法,平均重建时间仅 0.03s.说明对于实时性要求较高的行业,本算法将具有很好的应用价值.

表 4 各算法对 Lena 图像重建时间对比(单位:s)

| 重建算法    | 采样率   |       |       |       | 平均时间  |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   |       |
| s-HM    | 35.24 | 55.04 | 75.14 | 94.06 | 64.87 |
| MH      | 3.13  | 5.04  | 5.37  | 4.08  | 4.41  |
| TSBS-VB | 11.70 | 16.92 | 21.71 | 26.27 | 19.15 |
| TVAL3   | 2.51  | 4.26  | 5.46  | 7.25  | 4.87  |
| FCISMT  | 0.03  | 0.03  | 0.03  | 0.04  | 0.03  |

## 6 总结

本文提出了一种基于广义低秩矩阵分解的可分离字典重构算法.首先,针对传统广义低秩矩阵分解模型存在的问题,建立了对稀疏大噪声更鲁棒的广义低秩矩阵分解模型.其次,利用交替方向乘法求解该模型,得到一组列正交矩阵.最后,将该列正交矩阵当作可分

离字典,用于图像重构中,进而提出了一种快速压缩感知重建算法.该算法通过线性投影的方式替代了传统重建算法的非线性迭代过程,仅通过矩阵运算即可完成图像的快速近似重建.实验结果及分析也证实了本文算法的有效性,相比传统的重建算法,本算法将具有更优的重建性能.

#### 参考文献

- [1] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489 – 509.
- [2] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [3] 戴琼海,付长征,季向阳. 压缩感知研究[J]. *计算机学报*, 2011, 34(3): 425 – 434.  
Dai Qiong-hai, Fu Chang-jun, Ji Xiang-yang. Research on compressed sensing[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2011, 34(3): 425 – 434. (in Chinese)
- [4] Figueiredo M, Nowak R, Wright S. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2008, 1(4): 586 – 597.
- [5] Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655 – 4666.
- [6] Elad M. A wide-angle view at iterated shrinkage algorithms[J]. *Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering*, 2007, 6701(6701): 26 – 29.
- [7] He L, Chen H, Carin L. Tree-structured compressive sensing with variational Bayesian analysis[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(3): 233 – 236.
- [8] Dong W, Shi G, Li X, et al. Compressive sensing via nonlocal low-rank regularization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, 23(8): 3618.
- [9] 宋云,李雪玉,沈燕飞,等. 基于非局部相似块低秩的压缩感知图像重建算法[J]. *电子学报*, 2017, 45(3): 695 – 703.  
Song Yun, Li Xue-yu, Shen Yan-fei, et al. Compressed sensing image reconstruction based on low rank of non-local similar patches[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2017, 45(3): 695 – 703. (in Chinese)
- [10] 李然,干宗良,朱秀昌. 基于最佳线性估计的快速压缩感知图像重建算法[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(12): 3006 – 3012.  
Li Ran, Gan Zong-liang, Zhu Xiu-chang. A fast compressed-sensing image reconstruction algorithm based on best linear estimate[J]. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2012, 34(12): 3006 – 3012. (in Chinese)
- [11] Chen C, Tramel E, Fowler J. Compressed-sensing recovery of images and video using multihypothesis predictions[J]. *Signals, Systems and Computers*, 2011, 1193 – 1198.
- [12] 陈江琦,马尽文. 基于改进粒子群算法的压缩感知[J]. *信号处理*, 2016, 33(4): 488 – 495.  
Chen Jiang-qi, Ma Jin-wen. The improved particle swarm optimization algorithm based compressive sensing[J]. *Journal of Signal Processing*, 2016, 33(4): 488 – 495. (in Chinese)
- [13] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. The K-SVD: an algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4311 – 4322.
- [14] Hawe S, Seibert M, Kleinsteuber M. Separable dictionary learning[A]. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]*. IEEE, 2013. 438 – 445.
- [15] Lu C, Chen H. Compressive image sensing for fast recovery from limited samples: A variation on compressive sensing[J]. *Information Sciences*, 2015, 325: 33 – 47.
- [16] Roohi S, Zonoobi D, Kassim A, et al. Multi-dimensional low rank plus sparse decomposition for reconstruction of under-sampled dynamic MRI[J]. *Pattern Recognition*, 2016, 63: 667 – 679.
- [17] Cai J, Jia X, Gao H, et al. Cine cone beam CT reconstruction using low-rank matrix factorization: algorithm and a proof-of-principle study[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2014, 33(8): 1581 – 1591.
- [18] Chen S, Liu H, Hu Z, et al. simultaneous reconstruction and segmentation of dynamic PET via low-rank and sparse matrix decomposition[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2015, 62(7): 1784 – 1795.
- [19] Wang L, Sun Y, Gao S, et al. Automatic misalignment correction of seismograms using low-rank matrix recovery[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2012, 10(2): 352 – 356.
- [20] Candès E, Li X, Ma Y, et al. Robust principal component analysis[J]. *Journal of the ACM*, 2009, 58(3): 1 – 37.
- [21] 徐森,周天,于化龙,等. 一种基于矩阵低秩近似的聚类集成算法[J]. *电子学报*, 2013, 41(6): 1219 – 1224.  
Xu Sen, Zhou Tian, Yu Hua-long, et al. Matrix low rank approximation-based cluster ensemble algorithm[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(6): 1219 – 1224. (in Chinese)
- [22] Ye J. Generalized low rank approximations of matrices[J]. *Machine Learning*, 2005, 61(1): 167 – 191.
- [23] Candès E, Emmanuel J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. *Comptes*

- Rendus-Mathématique, 2008, 346(9): 589 – 592.
- [24] 贾正华. 广义逆矩阵及其性质[J]. 巢湖学院学报, 2005, 7(3): 38 – 39.  
Jia Zheng-hua. Generalized inverse matrix and its some properties[J]. Journal of Chaohu College, 2005, 7(3): 38 – 39. (in Chinese)
- [25] 王秀清, 陈北英, 于朝霞. 关于矩阵的 Kronecker 积的一些性质[J]. 山东师范大学学报(自然科学版), 2010, 25(4): 147 – 149.  
Wang Xiu-qing, Chen Bei-ying, Yu Zhao-xia. Some properties of Kronecker product of matrices [J]. Journal of Shandong Normal University (Natural Science), 2010, 25(4): 147 – 149. (in Chinese)
- [26] 邵逸民. 行(列)满秩矩阵的一些性质及应用[J]. 长春师范学院学报(自然科学版), 2008, 27(6): 22 – 25.  
Shao Yi-min. Some properties of row (column) full rank matrices and their applications [J]. Journal of Changchun Normal University (Natural Science), 2008, 27(6): 22 – 25. (in Chinese)
- [27] 陈永林, 李志林. 用 Kronecker 积与广义逆矩阵求解矩阵方程[J]. 南京师大学报自然科学版, 1991, 14(1): 9 – 15.  
Chen Yong-lin, Li Zhi-lin. Solving matrix equation by using kronecker product and generalized inverse of a matrix [J]. Journal of Nanjing Normal University (Natural Science), 1991, 14(1): 9 – 15. (in Chinese)
- [28] 王建宏, 谢燕, 周星月. 矩阵内积的性质[J]. 高师理科学刊, 2010, 30(2): 12 – 16.  
Wang Jian-hong, Xie Yan, Zhou Xing-yue. The properties of inner product properties of matrices [J]. Journal of Science of Teachers' College and University, 2010, 30(2): 12 – 16. (in Chinese)
- [29] Chen M, Lin Z, Ma Y, et al. The augmented Lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices [J]. Eprint Arxiv, 2010, 9.
- [30] Yuan X, Yang J. Sparse and low-rank matrix decomposition via alternating direction methods [J]. Pacific Journal of Optimization, 2013, 9(1): 167 – 180.
- [31] Gower J, Dijksterhuis G. Procrustes Problems [M]. Oxford University Press, 2004, 168(2): xiv, 233.
- [32] Yuan X, Rao V, Han S, et al. Hierarchical infinite divisibility for multiscale shrinkage [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(17): 4363 – 4374.
- [33] Li C, Yin W, Zhang Y. TVAL3: TV Minimization by Augmented Lagrangian and Alternating Direction Algorithm [EB/OL]. <http://www.caam.rice.edu/~optimization/L1/TVAL3/>, 2009.
- [34] Wang H, Cen Y, He Z, et al. Robust generalized low-rank decomposition of multi-matrices for image recovery [J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2017, 19(5): 969 – 983.

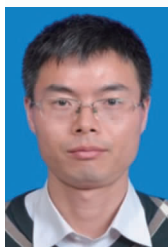
### 作者简介



**张长伦** 男. 1972 年 8 月出生, 山东济宁人. 2005 年毕业于北京交通大学电子信息与工程学院, 取得工学博士学位. 现为北京建筑大学理学院副教授, 从事网络信息安全理论与应用研究、大数据分析、复杂网络理论研究等.  
E-mail: zclun@bucea.edu.cn



**余 沾** 男. 1993 年 6 月出生, 湖北荆州人. 2015 年毕业于北京建筑大学信息与计算科学系, 取得理学学士学位. 现为北京建筑大学理学院硕士研究生, 从事压缩感知、低秩矩阵分解等有关方面研究.  
E-mail: 2107010415004@stu.bucea.edu.cn



**王恒友 (通信作者)** 男. 1982 年 8 月出生, 安徽蚌埠人. 2017 年毕业于北京交通大学计算机与信息技术学院, 获工学博士学位. 现为北京建筑大学理学院副教授. 主持国家自然科学基金青年项目 1 项, 主持北京市教委科技计划项目 1 项, 2016 年入选北京建筑大学“建大英才”支持项目, 已发表科研论文 10 余篇. 从事稀疏表示、低秩矩阵恢复理论及其在图像处理中的应用、机器学习等有关方面研究.  
E-mail: wanghengyou@bucea.edu.cn